Aufgabenstellung

Der Querschnitt einer 6 m langen Dachrinne (*Abbildung 1*), die bei der oberen Öffnung 1 dm breit ist, lässt sich durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades beschreiben. Dabei liegt der tiefste Punkt der Rinne im Ursprung, der Hochpunkt *H* ist doppelt soweit wie der in gleicher Höhe liegende Punkt *P* von der *y*-Achse entfernt. Im Folgenden soll 1 dm einer Längeneinheit auf den Achsen entsprechen.

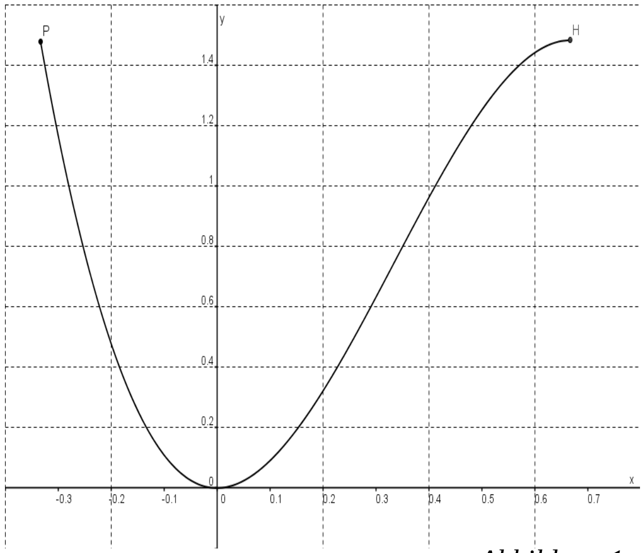

Abbildung 1

a) *Weisen Sie nach, dass die beschriebene Funktion ein Vertreter der durch* $f_t(x) = 10 \cdot \left(-x^3 + tx^2 + (1-t) \cdot x\right)$, $t \in \mathbb{R}$ *, gegebenen Kurvenschar ist.*

[Zur Kontrolle: $f(x) = -10x^3 + 10x^2$] (9 Punkte)

Modelllösung a)

$f_t(x) = 10 \cdot \left(-x^3 + tx^2 + (1-t) \cdot x\right)$ und $f_t'(x) = 10 \cdot \left(-3x^2 + 2tx + (1-t)\right)$

Aus $f_t'(0) = 0$ folgt $t = 1$.

Also: $f_1(x) = -10x^3 + 10x^2$

Aus den Angaben im Aufgabentext ergeben sich durch Rechnung die Punkte $H\left(\frac{2}{3} \middle| \frac{40}{27}\right)$ und $P\left(-\frac{1}{3} \middle| \frac{40}{27}\right)$.

Weiterhin gilt: $f_1'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ und $f_1''\left(\frac{2}{3}\right) < 0$, also handelt es sich bei *H* um einen relativen Hochpunkt.

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	gibt die Ableitungsfunktion an.	2 (I)
2	weist nach, dass *t* = 1.	2 (II)
3	berechnet die Koordinaten von *P* und *H*.	3 (I)
4	zeigt, dass *H* ein relativer Hochpunkt des Graphen ist.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Stellungnahme

Die eingehende Prüfung der fraglichen Teilaufgabe hat folgendes ergeben.

1. Die Beschreibung (der Randkurve des Dachrinnenquerschnitts) im Vorspann der Aufgabenstellung ist unvollständig in dem Sinne, dass sich daraus eine eindeutige Funktionsgleichung ergäbe.

   Die Aussage: „..., der Hochpunkt *H* ist doppelt soweit wie der in gleicher Höhe liegende Punkt *P* von der *y*-Achse entfernt.“ trifft auf den Graphen jeder ganzrationalen Funktion 3. Grades zu, dessen Tiefpunkt der Koordinatenursprung ist. Eine entsprechende Eigenschaft besitzt der Graph jeder ganzrationalen Funktion 3. Grades, die lokale Extrema aufweist.

   Zusammen mit der nebenstehenden *Abbildung 1* ist die Eindeutigkeit (insbesondere $a < 0$) jedoch gegeben.

2. Auf diesen gesamten Vorspann bezieht sich die Aufgabenstellung der Teilaufgabe a).
   Der dort geforderte Nachweis ist in der Weise zu führen, dass geprüft wird, ob ein Wert des Parameters *t* existiert, so dass der Graph von f_t die im Vorspann der Aufgabe aufgeführten Eigenschaften hat. Aus der Tiefpunkt-Bedingung ergibt sich sofort $t = 1$, die weiteren Eigenschaften sind durch Rechnung leicht nachzuprüfen. Dabei sind verschiedene Lösungs- bzw. Rechenwege in unterschiedlicher Vollständigkeit möglich. Der mögliche Hinweis eines Schülers auf die Universalität der Abstandseigenschaft der Punkte *P* und *H* bezüglich der *y*-Achse könnte, ohne dass eine konkrete Rechnung wie in der Modelllösung gemacht wird, vom Fachlehrer als „sachlich richtige Alternative“ mit voller Punktzahl 3 als Ersatz für das dritte Kriterium gewertet werden.

3. Herr Kowalski geht von einem, nach seiner Meinung dem Vorspann entspringenden Arbeitsauftrag aus, der darin besteht, zunächst die Gleichung einer Funktion zu ermitteln, deren Graph die im Text aufgeführten Eigenschaften besitzt, und danach deren Übereinstimmung mit der gegebenen Funktionsgleichung nachzuweisen. (In der Tat ginge es um zwei Scharen bzw. Mengen von Funktionen f_t bzw. g_a, deren Schnittmenge eine einzige Funktion $f = f_{t^*} = g_{a^*}$ enthält mit $t^* = 1$ und – abhängig vom Ansatz – z. B. $a^* = -10$.) Ein solcher Arbeitsauftrag existiert jedoch nicht. Damit ist die Argumentation hinfällig.

4. Bezeichnend ist, dass kein Fachlehrer, der diese Aufgabe gewählt hat, von Schwierigkeiten seiner Schüler bei der Lösung der Aufgabe bzw. von seinen Schwierigkeiten bei der Bewertung der Schülerlösungen berichtet hat.

5. Offenbar wäre folgende Formulierung der Teilaufgabe – im Sinne der Nachhilfeorganisation – wünschenswert gewesen:

a) *Weisen Sie nach, dass der Graph einer der durch* $f_t(x) = 10 \cdot \left(-x^3 + tx^2 + (1-t) \cdot x\right)$, $t \in \mathbb{R}$, *gegebenen Funktionen die oben aufgeführten Eigenschaften besitzt.*

[Zur Kontrolle: $f(x) = -10x^3 + 10x^2$] (9 Punkte)